EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….060**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{4+5i}{6+7i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(4,5,6)$ la planul $x+y+z-4=0$ **.**

(4p) **c)** Să se găsească un punct cu coordonatele numere întregi situat pe cercul $x^2+y^2=13$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(0,1,2)$, $M(0,2,3)$ și $N(0,3,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ și $D(4,5,6)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{3+4i}{5+6i}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\hat{2}^{2007}$ în $\mathbf{Z}_7$.

(3p) **b)** Să se calculeze $C_3^0\cdot C_3^1\cdot C_3^2\cdot C_3^3$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+x+1$ are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(3)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3-x=6$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul tuturor rădăcinilor polinomului $f=X^4+X^3+X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3^x+x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1\frac{x^3}{x^4+10}\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulţimea M formată din toate matricele cu 3 linii şi 3 coloane şi care au toate elementele din mulţimea $\{1, 3, 5\}$.

(4p) **a)** Să se arate că matricea $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ este din mulţimea *M*.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul matricei $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

(4p) **c)** Să se găsească două matrice $P, Q \in M$, astfel încât $rang(P) = 1$ şi $rang(Q) = 2$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $A \in M$, atunci determinantul matricei A se divide cu 4.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $B \in M$ este o matrice inversabilă, atunci $B^{-1} \notin M$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A \in M$, atunci matricea A^{2007} are toate elementele nenule.

(2p) **g)** Să se determine numărul elementelor mulţimii M.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^a$, unde $a \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $a > 1$, atunci funcţia f este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.

(4p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că există $c(a)$ (care depinde de *a*), $c(a) \in (3, 4)$ şi $d(a)$ (care depinde de *a*), $d(a) \in (5, 6)$, astfel încât $4^a - 3^a = a(c(a))^{a-1}$ şi $6^a - 5^a = a(d(a))^{a-1}$.

(2p) **d)** Să se arate că pentru orice funcţii $g : \mathbf{R} \to (3, 4)$ şi $h : \mathbf{R} \to (5, 6)$, ecuaţia $x(g(x))^{x-1} = x(h(x))^{x-1}$, $x \in \mathbf{R}$, are numai soluţiile $x = 0$ şi $x = 1$.

(2p) **e)** Să se rezolve în numere reale ecuaţia $3^x + 6^x = 4^x + 5^x$.

(2p) **f)** Să se arate că $\sqrt{4} + \sqrt{5} > \sqrt{3} + \sqrt{6}$ şi $4^2 + 5^2 < 3^2 + 6^2$.

(2p) **g)** Să se arate că $\dfrac{3 \cdot 4}{\ln 4} + \dfrac{4 \cdot 5}{\ln 5} < \dfrac{2 \cdot 3}{\ln 3} + \dfrac{5 \cdot 6}{\ln 6}$.